

Varianta 052

Subiectul I

a) Dacă $z = 7 + 3i \Rightarrow \bar{z} = 7 - 3i$

b) $CD = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

c) Rezolvând sistemul obținem $\begin{cases} x = -22 \\ y = 23 \end{cases}$

d) Am $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ deci L, M, N coliniare.

e) $x = \frac{1}{2}, y = \frac{3}{2}$

f) $(\sqrt{3} + i)^2 = a + bi \Leftrightarrow (3 - 1 + 2\sqrt{3}i) = a + bi \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2\sqrt{3} \end{cases}$

Subiectul II

1. a) Eliminând parantezele se obține egalitatea

b) Folosind a) obținem $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = z$

c) Notând $a = 2^x, b = 3^x, c = 5^x$ și aplicând b) obținem $2^x = 3^x = 5^x \Leftrightarrow x = 0$

d) Relația e verificată de 1 și 2, deci probabilitatea este $\frac{2}{3}$

e) $f(1) = 2$.

2. a) $f'(x) = \sin x + x \cos x, (\forall) x \in \mathbf{R}$

b) $\int_0^1 f'(x) dx = f(1) - f(0) = \sin 1$

c) Deoarece $\sin x \geq 0, \cos x > 0, (\forall) x \in [0, 1] \subset [0, \frac{\pi}{2})$, folosind a) obținem $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ strict

crescătoare pe $[0, 1]$.

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = 0$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Subiectul III

a) $AB = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$

$BA = \begin{pmatrix} ea + fc & eb + fd \\ ga + hc & gb + hd \end{pmatrix}$

b) Evident $ae + bg + cf + dh = ea + fc + gh + hd$

$$c) A+B = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}; \quad A-B = \begin{pmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{pmatrix}$$

$$d) \det(A+B) + \det(A-B) = (a+e)(d+h) - (b+f)(c+g) + (a-e)(d-h) - (b-f)(c-g) = 2(ad-bc+eh-fg) = 2(\det A + \det B)$$

$$e) \det AB = (ae+bg)(cf+dh) - (af+bh)(ce+dg), \text{ iar}$$

$$\det A \cdot \det B = (ad-bc)(eh-fg) \text{ si se verifică prin calcul direct egalitatea.}$$

$$f) \text{ pentru } n=2, \text{ aplicând e) am } \det(A_1 \cdot A_2) = \det A_1 \cdot \det A_2$$

$$\text{Presupun } \det(A_1 A_2 \dots A_n) = \det A_1 \cdot \det A_2 \cdot \dots \cdot \det A_n \text{ si am}$$

$$\det(A_1 A_2 \dots A_n A_{n+1}) = \det((A_1 A_2 \dots A_n) \cdot A_{n+1}) = \det(A_1 A_2 \dots A_n) \cdot \det A_{n+1} =$$

= $\det A_1 \cdot \det A_2 \cdot \dots \cdot \det A_n \cdot \det A_{n+1}$ și conform principiului inducției matematice propoziția este adevărată pentru $(\forall) n \in \mathbf{N}, n \geq 2$

$$g) \text{ Aplicând f) cu } A_1=A_2=\dots=A_n=A \text{ obțin } \det A^n = \det \left(\underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{n \text{ ori}} \right) = \underbrace{\det A \cdot \det A \cdot \dots \cdot \det A}_{n \text{ ori}} = (\det A)^n$$

Subiectul IV

$$a) f(1) = 5$$

$$b) (x-1)f(x) = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = x^5 - 1, (\forall)x \in \mathbf{R}$$

$$c) f(1) = 5 > 0$$

$$(\forall)x > 1 \quad f(x) = \frac{x^5 - 1}{x - 1} > 0$$

$$(\forall)x < 1 \quad f(x) = \frac{x^5 - 1}{x - 1} > 0$$

$$\text{Deci } f(x) > 0, (\forall)x \in \mathbf{R}$$

$$d) F \text{ este o primitivă pe } \mathbf{R} \text{ a lui } f \text{ adică } F'(x) = f(x), (\forall)x \in \mathbf{R}$$

$$\text{Altfel } F(x) = \int_0^x f(t)dt = \left(t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4} + \frac{t^5}{5} \right) \Big|_0^x = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$$

$$F'(x) = f(x), (\forall)x \in \mathbf{R}$$

$$e) \text{ Folosind d) și c) am } F'(x) = f(x) > 0 \Rightarrow F \text{ este strict crescătoare pe } \mathbf{R}$$

$$f) F(x) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \text{ se verifica pentru } x=1 \text{ si cum } F \text{ este strict crescătoare } \Rightarrow F \text{ este injectivă;}$$

decă $x=1$ este soluție unică

$$g) \text{ Fie } x > 0$$

$$F(x) < x \cdot f(x) \Leftrightarrow F(x) - x \cdot f(x) < 0$$

$$\text{Notez } h(x) = F(x) - x \cdot f(x) \Rightarrow h'(x) = F'(x) - f(x) - x \cdot f'(x) = -x \cdot f'(x)$$

$$f'(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow f''(x) = 2(6x^2 + 3x + 1) > 0, (\forall)x > 0 \Rightarrow f' \text{ strict crescătoare și cum}$$

$$f'(0) = 1 \Rightarrow f'(x) > 0$$

Deci $h'(x) = -x \cdot f'(x) < 0, (\forall)x > 0 \Rightarrow h$ este strict descrescătoare si cum $h(0) = 0 \Rightarrow h(x) < 0, (\forall)x > 0$ adică $F(x) < x \cdot f(x), (\forall)x > 0$.